第一届模拟期中考试试题(数学组)

常规题

1. 设数列$\{x_n\}$使得$\{2x_{n+1}+x_n\}$收敛.证明:$\{x_n\}$收敛.

2. 设有连续函数$f:[0,1]\to[0,1]$,记$f^n(x)=f(f^{n-1}(x)),f^1(x)=f(x)$(即$f^n$为$f$的$n$次迭代.)若$f^{2017}(x)=x(\forall x\in[0,1])$,证明$f(x)=x$

3. 称数列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$一致分布,若对任意$(a,b)\subset[0,1]$都有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|1\le k\le N|x_k\in(a,b)|}{N}=b-a$$

证明:如递增正实数列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_{n+1}-x_n)=+\infty$

则它的小数部分一致分布.

4. 给定平面上无理点$P_0(\sqrt{2},0)$,对任意三个有理点$P_i=(x_i,y_i)(i=1,2,3),x_i,y_i\in\mathbb{Q}$,求证:$P_0,P_1,P_2,P_3$不能同时在平面上任意一个圆的圆周上.

5. 考虑3维实向量

$$\alpha=(1,2,3),\beta=(4,5,6),\gamma=(7,8,9)$$

是否存在3×3实矩阵A,使得

$$\alpha A=\beta,\beta A=\gamma,\gamma A=\alpha?$$

6. 定义Z_n为整数模n的同余类的集合, 带有自然的加减法运算. 以Z_n^k记k个Z_n的笛卡尔积, 也有自然的加减法运算. 引入n^k个未定元, 记作$\{x_a\}_{a\in Z_n^k}$. 随便将Z_n^k排个序, 即指定双射$f:\{1,2,\dots,n^k\}\to Z_n^k$. 显然, 行列式$\det\left(x_{f(i)-f(j)}\right)_{1\le i,j\le n^k}$与如何排序$Z_n^k$无关. 试将其在$\mathbb{C}$中因式分解.

7. 给定直角坐标系中的三个圆.

$$C_1:\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=1\end{cases},C_2:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases},C_3:\begin{cases}x^2+y^2=7\\ z=-1\end{cases}$$

考虑空间中与C_1,C_2,C_3同时相交的直线.请决定所有这样的直线的并集,并说明理由.

8. 已知双曲抛物面F在一个右手直角坐标系下的方程为$z=x^2-y^2$,平面A在该坐标系下的方程为$x+y+z=0$.请在平面A上构造一个平面右手直角坐标系,并在该坐标系下用一个二次不等式刻画F在平面A上的垂直投影

9. 求边长为1的正12面体的体积.

提示:正五边形的边长与任意一对不相邻顶点之间距离的比值是黄金分割率$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

附加题

10. 考虑函数$f(x)=rx(1-x)$, $r\geq 1$. 以f^n记f迭代n次, 即$f^0=\mathrm{id}$, $f^n=f\circ f^{n-1}$. 对$r<3$, 证明: 对任意$x\in(0,1)$, 都有$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=1-1/r$. $r=3$时情况如何?

11. 对素数p, 定义$\mathbb{F}_p$为整数模p的同余类的集合, 带有自然的四则运算. 以$\mathbb{F}_p^2$记$\mathbb{F}_p$上的平面, 即$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{F}_p\}$. 如在$\mathbb{R}^2$中一样, 以"点"称$\mathbb{F}_p^2$的元素, 以"直线"称形如$ax+by+c=0$的方程的解集, 其中$a,b,c\in\mathbb{F}_p$, a,b不同为0. 对哪些p, $\mathbb{F}_p^2$上存在九个点, 使得其中无四点共线, 且连接其中任两个点的直线皆过其中另一个点?

12. 两个圆锥曲线Γ_1,Γ_2交于四点A,B,C,D.在直线AB上取点O,过O作ℓ_1交Γ_1于E_1,F_1,过O作ℓ_2交Γ_2于E_2,F_2.求证:C,D,E_1,F_1,E_2,F_2共一圆锥曲线.

第一届模拟期中考试试题(非数学组)

常规题

1. 求下列数列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n-1]{a})(a>0)$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}$

3. 是否存在非负发散数列$\{a_n\},\{b_n\}$,使得$\{a_n+b_n\}$是收敛数列?

4. 证明:当$x>0$时,下面的不等式成立

$$(1+\frac{1}{x})^x<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$$

5. 求不定积分$\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

6. 计算不定积分

$$\int\frac{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$$

7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,若矩阵$B$满足$AB+I=A^2-B$,求$B$

8. 设方阵A满足$A^2-A+3I=0$,证明$(A+2I)$可逆,并用A表示$(A+2I)^{-1}$

9. 设A为3×3的复数方阵,满足A的各个元素均为$1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$,求$|A|$的所有可能实数值.

附加题

10. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数,且处处存在右导数.

(1) 若$f'_+(x)$非负证明$f(x)$单调递增

(2) ”连续”条件可以去掉吗?

11. 设φ是n维实线性空间V上的线性变换,证明:若V的任意$n-1$维子空间W都满足对任意$w\in W,\varphi(w)\in W$.证明:存在实数$a\in\mathbb{R}$,使得$\varphi(\alpha)=a\alpha$

第一届模拟期中考试答案(数学组)

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty} 2x_{n+1}+x_n=a$

首先我们证明$\{x_n\}$有界.取$\varepsilon_0>0$,存在N,使得任意$n>N$,$|2x_{n+1}+x_n-a|<\varepsilon_0$.由于$\varepsilon_0>|2x_{n+1}+x_n-a|>2|x_{n+1}|-|x_n|-|a|$,从而$|x_{n+1}|<\frac{|a|+\varepsilon_0+|x_n|}{2}$,从而归纳可得$|x_n|<\max\{|a|+\varepsilon,x_{n+1}\}$,从而$x_n$有界.

设$\overline{\lim}\, x_n=A,\underline{\lim}\, x_n=B$.对$x_n=(2x_{n+1}+x_n)-2x_{n+1}$,两边取上极限得

$$A=p-2B$$

取下极限得

$$B=p-2A$$

从而$A=B=\frac{p}{3}$,因此$\{x_n\}$收敛.

2. 首先我们证明f是单射.反证,假设存在$x_1\neq x_2$,使得$f(x_1)=f(x_2)$,得$x_1=f^{2017}(x_1)=f^{2017}(x_2)=x_2$,矛盾!从而$f$单.从而$f$单调.且显然$f$单调递增.假设存在$x_0$使得$f(x_0)\neq x_0$,则不妨设$f(x_0)<x_0$.由$f$单调递增,从而$x_0>f(x_0)>f(f(x_0))>\cdots>f^{2017}(x_0)=x_0$.矛盾!

3. 对$n\in\mathbb{N}$,必存在$i\in\mathbb{N}$,使得

$$\frac{3i(i+1)}{2}\leq n<\frac{3(i+1)(i+2)}{2}$$

若$n<\frac{3i(i+1)}{2}+2i+2$,令$x_n=i+\frac{2n-3i(i+1)}{8(i+1)}$

若$n\geq\frac{3i(i+1)}{2}+2i+2$ 令$x_n=i+\frac{1}{2}+\frac{2n-3i(i+1)-4i-4}{4(i+1)}$

从而$\{x_n\}$小数部分不一致分布,矛盾!故此题有误.

4. 此题有误,反例$x^2+y^2=2$

5. 证明 若存在A,令$\lambda=(3,3,3)$,则$\lambda A=(\gamma-\beta)A=-2\lambda$,又有$\lambda A=(\beta-\alpha)A=\lambda$.从而$-2\lambda=\lambda$,矛盾!.从而$A$不存在. □

6. 以μ_n记所有n次单位根的集合, 则μ_n上有乘法运算, μ_n^k上也有逐坐标乘法. 对$\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_k)\in\mu_n^k$, $a=(a_1,\ldots,a_k)\in Z_n^k$, 定义$\omega^a=\prod_{j=1}^k\omega_j^{a_j}$, 则它满足指数该满足的性质. 对每个$\omega\in\mu_n^k$, 考虑列向量$\boldsymbol{\omega}=\left(\omega^{f(j)}\right)_{1\leq j\leq n^k}$. 以题中矩阵乘以它得到

$$\begin{aligned}\left(x_{f(i)-f(j)}\right)\boldsymbol{\omega}&=\left(x_{f(i)-f(j)}\right)\left(\omega^{f(j)}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n^k}\omega^{f(j)}x_{f(i)-f(j)}\right)\\&=\left(\sum_{a\in Z_n^k}\omega^a x_{f(i)-a}\right)=\left(\sum_{a\in Z_n^k}\omega^{f(i)-a}x_a\right)=\left(\omega^{f(i)}\sum_{a\in Z_n^k}\omega^{-a}x_a\right)\\&=\sum_{a\in Z_n^k}\omega^{-a}x_a\left(\omega^{f(i)}\right)=\left(\sum_{a\in Z_n^k}\omega^{-a}x_a\right)\boldsymbol{\omega}.\end{aligned}$$

对$\varepsilon\in\mu_n^k$, 定义线性函数$f_\varepsilon:\mathbb{C}^{n^k}\to\mathbb{C}$为$f_\varepsilon(z_1,\ldots,z_{n^k})=\sum_{j=1}^{n^k}\varepsilon^{-f(j)}z_j$, 则对$\omega\in\mu_n^k$,

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{n^k}\varepsilon^{-f(j)}\omega^{f(j)}=\sum_{a\in Z_n^k}(\varepsilon^{-1}\omega)^a=\begin{cases}1, & \varepsilon=\omega;\\0, & \varepsilon\neq\omega.\end{cases}$$

所以所有的$\boldsymbol{\omega}$线性无关, 构成$\mathbb{C}^{n^k}$的一组基. 由之前推理, 题中矩阵在这组基下为对角阵, 而行列式不依赖基的选取, 故原行列式等于题中矩阵在这组基下对角元的乘积, 即

$$\prod_{\omega\in\mu_n^k}\left(\sum_{a\in Z_n^k}\omega^{-a}x_a\right)=\prod_{\omega\in\mu_n^k}\left(\sum_{a\in Z_n^k}\omega^a x_a\right).$$

7. 解 记题设集合为S.观察知S关于Z轴旋转对称.考虑经过C_2的点$P=(1,0,0)$的且经过C_1的直线。所有这样的直线形成顶点在P的一个斜圆锥，它在平面$z=1$的截口是与C_3相交(于两点)的圆。其实，可以写出斜圆锥方程$(x-1+z)^2+y^2=4z^2$.因此经过点P恰好有两条直线l_1,l_2与C_1,C_2,C_3都相交.由旋转对称性, l_1绕Z轴旋转产生的旋转单叶双曲面H包含于S.由H的直纹性和$C_1,C_2,C_3\subset H$，我们知道H上经过点P的两条直线其一为l_1，另一条则只能为l_2。再次利用旋转对称性即说明S包含于H,所以S就是旋转单叶双曲面H.

为了写出S的方程,我们作待定系数$x^2+y^2=az^2+bz+c$,由C_1,C_2,C_3的方程立即能解出.

$$x^2+y^2=\frac{9}{2}z^2-\frac{3}{2}z+1$$

□

8. 设坐标变换为$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 其中,A是一个3×3的矩阵,不妨设$x+y+z=0$变换之后为$z'=0$.设$A=(a_{ij})_{3\times3}$.则$a_{31}=a_{32}=a_{33}$,不妨设为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.取垂直于这个向量的两个互相的向量$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.将它们单位化之后,作为变换后的$y$轴和$x$轴.则有

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

则$\sqrt{6}x'+2\sqrt{3}z'=3(x+y)$, $\sqrt{2}y'=x-y$.由$z=x^2-y^2$,用x',y',z'带,为$\frac{\sqrt{3}z'-\sqrt{6}x'}{3}=\sqrt{2}y'\cdot\frac{\sqrt{6}x'+2\sqrt{3}z'}{3}$,化简$z'\cdot(\sqrt{3}-2\sqrt{3}y')=\sqrt{6}x'+\sqrt{6}x'y'$,由此可得,任意的$(x',y')$(除了所有的$(k,\frac{1}{2})(k\neq0)$)均可以取到.

9. 通过适当地在没给面上选择不相邻顶点连线,可以在该正十二面体内得到一个边长为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的立方体,其体积为$\sqrt{5}+2$.而正十二面体是在该六个面上各加一个屋顶.这些屋顶体积相同.考虑图中所示屋顶$A_1A_2B_1B_2B_3B_4$,则$A_1(-\frac{1}{2},0,t)$, $A_2(\frac{1}{2},0,t)$, $B_1(-\frac{\sqrt{5}+1}{4},-\frac{\sqrt{5}+1}{4},-\frac{\sqrt{5}+1}{4})$, $B_2(\frac{\sqrt{5}+1}{4},-\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4})$,

$B_3(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4})$, $B_3(\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4})$, $B_4(-\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{\sqrt{5}+1}{4})$.由$|A_1B_1|=1$,得知$t=\frac{\sqrt{5}+3}{4}$.现在把这四个屋顶分割成四棱锥$A_1B_1B_2B_3B_4$以及四面体$A_1A_2B_2B_3$,再把四棱锥$A_1B_1B_2B_3B_4$进一步拆成两个四面体$A_1B_1B_2B_4$和$A_1B_2B_3B_4$.注意到四面体$ABCD$的体积是$\frac{1}{3}$倍的底面积乘以高,也等于$\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|$,因此四棱锥$A_1B_1B_2B_3B_4$的体积是$\frac{\sqrt{5}+3}{12}$,四面体$A_1A_2B_2B_3$的体积是$\frac{\sqrt{5}+1}{24}$.从而正十二面体的体积是$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}$

10. 我们对$r\le3$给出统一证明, 但可能有更简单的方法做$r<3$情形. 显然, 如果数列收敛, 则必收敛到f的不动点$1-1/r$(很容易排除0). 首先由

$$f(x)-1+\frac{1}{r}=(1-rx)\left(x-1+\frac{1}{r}\right)$$

得$r\le2$时结论, 因为此时对任意$x\in(0,1)$, 有$|1-rx|<1$; $f^n(x)$如有子列收敛至$[0,1]$中其它点, 则由于数列到$1-1/r$的距离只能越来越小, 我们得到数列单调, 于是收敛, 却不收敛到$1-1/r$, 矛盾.

下设$2<r\le3$. 此时如$x\in(0,1/r)$, 由上式可看出$x<f(x)<1-1/r$, 且$\exists n\in\mathbb{N}$, $f^n(x)\in[1/r,1-1/r]$(如一直不在则一直递增, 又收敛到$1-1/r$以外的值了). 如$x\in(1-1/r,1)$, 则由上式$f(x)\in(0,1-1/r)$, 由之前推理, 亦$\exists n\in\mathbb{N}$, $f^n(x)\in[1/r,1-1/r]$. 于是不失一般性, 可设$x\in[1/r,1-1/r]$.

从上式还可以看出, 只要$x\in[1/r,1-1/r]$, 就有$f(x)\ge 1-1/r$, 于是又有$f(f(x))\le 1-1/r$. 又因为

$$\begin{aligned}f(f(x))-x&=r^2x(1-x)(1-rx(1-x))-x\\&=-r^3x^3+2r^3x^2-r^2(r+1)x+r^2-1\\&=x(r-1-rx)(r^2x^2-r(r+1)x+r+1)\end{aligned}$$

而$(r(r+1))^2-4r^2(r+1)=r^2(r+1)(r-3)\le 0$, 所以$x\le 1-1/r$时有$f(f(x))\ge x$. 综上, 当$x\in[1/r,1-1/r]$时我们有$x\le f(f(x))\le 1-1/r$. 这样一来, $f^{2n}(x)$ 单调有界, 故有极限. 极限a满足$f(f(a))=a$, 所以有$a=1-1/r$(注意$r=3$时$f(f(x))-x$的二次因式的根恰为$2/3$, 也是$1-1/r$). 此时有$f(a)=a$, 于是$f^{2n+1}(x)$的极限也是a, 故$f^n(x)$收敛于$1-1/r$.

11. 所求p为3或模3余1的素数. 对于3, $\mathbb{F}_3^2$中仅有的九个点显然满足要求. 对$p\equiv 1 \pmod 3$, 存在$\omega\in\mathbb{F}_p\backslash 1$使得$\omega^3=1$. 此时令$A_1=(-1,0)$, $A_2=(-\omega,0)$, $A_3=(-\omega^2,0)$, $B_1=(0,-1/2)$, $B_2=(0,\omega)$, $B_3=(0,\omega^2)$, $C_1=(1,-1)$, $C_2=(\omega^2,-1)$, $C_3=(\omega,-1)$. 则容易验证有$A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_1B_2C_3$, $A_2B_3C_1$, $A_3B_1C_2$, $A_1B_3C_2$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_2C_1$十二组三点共线, 且没有四点共线, 故这九个点满足要求.

对$p\equiv 2 \pmod 3$, 我们要证明不存在这样的九个点. 用反证法, 设其存在, 为A_1,A_2,A_3, B_1,B_2,B_3, C_1,C_2,C_3, 并设$A_1A_2A_3$共线. 显然这九个点中任一对点决定一组三点共线, 而每条过三点的线上有三对点, 故共有$\binom{9}{2}/3=12$条线过九点中的某三点. 另外容易看出九点中的每一点都恰处于这十二条线中的四条上. 这样一来, 将A_1,A_2,A_3之外的六个点两两连线, 这$\binom{6}{2}=15$对点连出的线中必恰有九条过A_1,A_2,A_3中某一点(每点各三), 而剩下六对点连出的线都不过A_1,A_2,A_3. 而由于每条线必过三个点, 这六对点只连出两条线. 如果九个点中的某点, 设为B_1, 在这两条线上, 而另一点, 设为C_1, 不在这两条线上, 并设连接B_1C_1的直线过A_1. 则$B_1A_2A_3$共线(因为过B_1的四条线已有三条, 只剩A_2,A_3), 与无四点共线矛盾. 故九个点中没有点在这两条线上. 由此设这两条线为$B_1B_2B_3$与$C_1C_2C_3$. 类似地我们还可以假设$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_1B_2C_3$, $A_2B_3C_1$, $A_3B_1C_2$, $A_1B_3C_2$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_2C_1$共线.

为方便起见, 我们假设$A_1A_2A_3$与$B_1B_2B_3$不平行. (如果懂得射影变换, 一个射影变换即可做到这一点; 否则如果$A_1A_2A_3\parallel B_1B_2B_3$, 利用$p\ne 3$, $A_1B_1\parallel A_2B_2\parallel A_3B_3$, $A_1B_2\parallel A_2B_3\parallel A_3B_1$, $A_1B_3\parallel A_2B_1\parallel A_3B_2$不同时发生, 通过改变点的名称亦可做到$A_1A_2A_3$与$B_1B_2B_3$不平行.) 于是适当取坐标轴, 可设$A_1A_2A_3$为$x$轴, $B_1B_2B_3$为y轴, 分别设为$(1/a_1,0),(1/a_2,0),(1/a_3,0)$与$(0,1/b_1),(0,1/b_2),(0,1/b_3)$(显然它们不会是原点), 这样, 直线$A_iB_j$的方程即为$a_ix+b_jy=1$. 那么, 由共线条件, 这六个点互相连的直线有三组三线共点, 于是有

$$\begin{vmatrix}a_1&b_2&-1\\a_2&b_1&-1\\a_3&b_3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_3&-1\\a_2&b_2&-1\\a_3&b_1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&-1\\a_2&b_3&-1\\a_3&b_2&-1\end{vmatrix}=0,$$

即

$$a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2=a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1=0.$$

三式相加得$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)=0$, 故不妨设$a_1+a_2+a_3=0$. 伸缩坐标轴可不妨设$a_3=b_3=1$, 则(只取上面的第一和第三个式子)

$$a_1b_1+a_2+b_2=a_2b_2+a_1+b_1=0;$$

将上两个等于0的式子分别乘以b_2-1与b_1-1再相加得

$$(b_2-1)(a_1b_1+a_2+b_2)+(b_1-1)(a_2b_2+a_1+b_1)=0,$$

即

$$(b_1b_2-1)(a_1+a_2)+(b_1-1)b_1+(b_2-1)b_2=0,$$

即(由于$a_1+a_2+1=0$)

$$b_1^2+b_2^2-b_1b_2-b_1-b_2+1=0.$$

换元$u=b_1-1,\ v=b_2-1$并整理得

$$u^2+v^2-uv=0;$$

由于$b_1,b_2,b_3=1$互异, 我们有$u,v,0$互异, 于是上式说明(现在把u,v当作整数)$p\nmid u,\ p\nmid v$, 而$p\mid u^2+v^2-uv$, 与$p\equiv 2 \pmod 3$矛盾.

12. 记$\Gamma_1,\Gamma_2,\ell_1,\ell_2$的方程分别为$f_1=0,f_2=0,\ell_1=0,\ell_2=0$,设$OAB$的方程为$l=0$.考虑三次曲线$f_1\ell_2=0$,它过$O,A,B,C,D,E_1,F_1,E_2,F_2$九点,考虑过$E_1,F_1,C,D,E_2$的二次曲线$f=0$,三次曲线$lf=0$过$O,A,B,E,F,C,D,E_2$八点,则它过第九点$F_2$(Cayley－Bacharach定理).且$F_2$不在$OAB$上,从而$f$过$F_2$,即存在$f$,它过$E_1,F_1,E_2,F_2,C,D$六点.

第一届模拟期中考试答案(非数学组)

1. (1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $-\ln a$

2. (1) $\dfrac{2}{3}$

(2) 1

3. 存在. 令$\{a_n\}=\{0,1,0,1,\cdots\}$,$\{b_n\}=\{1,0,1,0,\cdots\}$

4. **证明** 取对数,知只需证明$x\ln(1+\dfrac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\dfrac{1}{x})^{x+1}$

求导即可. □

5.

$$\frac{(x+1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{x^2+1}}+C$$

6. 部分分式展开得到

$$f(x)=x+5+\frac{7}{10(x-1)}-\frac{127}{10(x-2)}+\frac{1093}{34(x-3)}-\frac{35x+6}{170(x^2+2x+2)}$$

从而

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-\frac{5\ln(x^2+2x+2)}{68}+5x+\frac{1093\ln(x-3)}{34}-\frac{27\ln(x-2)}{10}+\frac{7\ln(x-1)}{10}+\frac{19\arctan(x+1)}{17}-390+C$$

7.

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

8. $-\dfrac{A}{9}+\dfrac{I}{3}$

9. $0,\pm2,\pm4$

通过讨论展开式中$1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}$的个数,易得行列式的值只能为上述五个数. 下面给出构造:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}\pm1&\pm1&\pm1\\1&\mathrm{i}&1\\1&1&-\mathrm{i}\end{vmatrix}=\pm2,\begin{vmatrix}\pm1&\pm1&\pm1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\pm4,$$

10. (1) **证明** 用反证法,若$f(x)$非单调递增，则存在$x_1<x_2$,使得$f(x_1)>f(x_2)$

不妨设$x_1=0,x_2=1.$,则存在$\varepsilon>0$,使得$f(0)>f(1)+\varepsilon$.

令$g(x)=f(x)+\varepsilon x$,则$g(x)$连续,且处处右可导,右导数恒正.

设$0\le c<1$为$g(x)$在$[0,1]$上最大值点,则$g'_+(c)\le 0$.矛盾! □

(2) 连续条件不能去掉,可以考虑如下的反例: $f(x)=-x+1,x<0,x,x\ge0$

11. 对任意的α,将α扩充为全空间的一组基.$B=\{\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

设$\varphi(\alpha)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_i\alpha_i$,如果存在$2\le i\le n$,使得$c_i\ne0$,考虑$B-\{\alpha_i\}$生成的$n-1$维子空间,由于它是$\varphi$的不变子空间.从而$\varphi(\alpha)$属于这个子空间.由此可以推出$c_i\alpha_i$属于这个子空间,从而矛盾.

取V的一组基$B=\{e_1,\cdots,e_n\}$,有上述讨论,可设$\varphi(e_i)=k_ie_i$.从而$k_ie_i+k_je_j=\varphi(e_i+e_j)=a(e_i+e_j)$,因此$k_i=a=k_j$,从而所有的$k_i$相同,因此为数乘变换.