北京大学数学科学学院模拟期中考　　数学组

考试时间：**11 月 4 日　9：30-11：10**　　考试总分：**100 分**

姓名：____________　　　　学号：____________

1.（10 分）设 $\{x_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的有理数排成的一个序列。$R(x)$ 是黎曼函数，问序列 $\{R(x_n)\}$ 是否存在极限？若存在，请求之。

注：$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}(p<q\in\mathbb{N}\text{且}(p,q)=1)\\ 0 & x=0,1\text{或}x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

2.（10 分）求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)}{\arcsin(e^x-1)-e^{\arcsin x}+1}$

3.（15 分）是否存在函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$，满足 $\forall x>0,\lim\limits_{n\to+\infty}f(nx)=0$(这里 n 是自然数)，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$?

4.（10 分）求方程 $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$ 的实数解

5.（10 分）实数域上 $n\times(n+s)(s\geq 0)$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} t+a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+s}\\ a_{21} & t+a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,n+s}\\ a_{31} & a_{32} & t+a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3,n+1} & \cdots & a_{3,n+s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & t+a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+s}\end{pmatrix}$$

证明：当 t 足够大时，以 A 的转置 A' 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解。

6.（15 分）矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbb{Q}^{n\times n}$ 是斜对称矩阵，也即 $A=-A^T$。已知 $2|n$，且 $a_{ij}\in\mathbb{Z}\quad i,j=1,2,\cdots,n$，证明：$det(A)$ 是完全平方数。

7.（10 分）空间中给定旋转单叶双曲面 S。从 S 的两族直纹中各取一条直线，假设如此能形成的夹角最大为 $\theta<\frac{\pi}{2}$；从 S 的同族直纹中任取两条直线，又假设如此能形成的距离最大为 $d>0$。求：各族直纹与 S 的旋转轴所成的夹角和距离，并说明理由。

8.（10 分）空间直角坐标系中给定标准放置的椭球面 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>b>c>0)$。

求证：任何与 E 内接（于八个顶点）的直平行六面体，其三组棱一定分别平行于三条坐标轴。

9.（10 分）求边长为 1 的正十二面体的体积。（提示：正五边形不相邻顶点之间的距离与边长之比是黄金分割率 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$）