2019年模拟期中考数学组

时间：120分钟

满分：100分

2019.10.27

1. (20') 利用已学知识求下列极限
   (a) (6') $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{nlnn}$
   (b) (6') $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$
   (c) (8') 设$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$，$a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$，证明$\lim_{n\to\infty}a_n$存在并求之。

2. (10') 求直线 $l_1\begin{cases}2x-3y-z=0\\2x+9y-9z-4=0\end{cases}$ 关于直线 $l_2\begin{cases}x-3y+3z-9=0\\2x-3z+12=0\end{cases}$ 的对称直线的方程（用直线的标准方程表示）。

3. (15')
   (a) (5') 已知D=
   $$\begin{vmatrix}3&7&9&1\\-7&9&5&8\\2&4&-3&5\\1&-6&2&1\end{vmatrix}$$
   记A_{ij}为第i行第j列元素的代数余子式，计算$A_{13}+2A_{24}-3A_{11}+A_{44}$
   (b) (5') 求下列行列式的值 $\begin{vmatrix}8&5&0&\cdots&0&0\\3&8&5&\cdots&0&0\\0&3&8&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&8&5\\0&0&0&\cdots&3&8\end{vmatrix}_n$
   (c) (5') 求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组并证明 $\beta\in\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle$
   $$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\7\\1\\6\end{pmatrix}\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}-4\\7\\3\\6\end{pmatrix}\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\3\end{pmatrix}\quad\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}\quad\beta=\begin{pmatrix}-5\\35\\8\\27\end{pmatrix}$$

4. (10') 对一个固定的 $\alpha>0$，考虑数列 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{sini\alpha}{i^\alpha}$，证明$S_n$收敛。

5. (10') 在空间直角坐标系中，求所有过原点的直线 l，满足 l 与x轴夹角为$\frac{\pi}{3}$，且 P(1,2,-2)到 l 的距离为$\frac{\sqrt{35}}{2}$。

6. (10') 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，证明：集合$A=\{\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k^{n-1}\alpha_n|k\in\mathbb{Z}\}$中任意n个不同的向量线性无关

7. (10') 给定直角坐标系中的三个圆：

$$C1:\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases} \qquad C2:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases} \qquad C3:\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ z=-1 \end{cases}$$

考虑空间中与这三个圆同时相交的直线。求这些直线的并集，并说明理由。

8. (10') 实数域上 $n\times(n+s)$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} t+a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+s} \\ a_{21} & t+a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} & \cdots & a_{2,n+s} \\ a_{31} & a_{32} & t+a_{33} & \cdots & a_{3n} & a_{3,n+1} & \cdots & a_{3,n+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & t+a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+s} \end{pmatrix}$$

证明：当 t 足够大时，以A的转置为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解。

9. (5') 设$\{a_n\}_{n\geq 1}$为实数数列，定义算数平均值序列 $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。对$k\geq 1$，记$b_k=a_{k+1}-a_k$。设 $\{kb_k\}_{k\geq 1}$ 是有界的并且 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$。证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=\sigma$。