2020年模拟期中考数学组

时间：120分钟

满分：100分

2020.11.7

1.请在以下两道题中选择一道完成：(15’)

(a)单位球面$\Gamma : x^2+y^2+z^2=1$上有一点$N(0,0,1)$

过点N和球面上除N外任意一点$A(x,y,z)$的直线必与平面xOy有一交点$A'(x',y')$

试用x,y,z表示x',y'

(b)设三维空间中三个向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$满足$\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$共面

证明：$\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$共线

2.利用已学知识求下列极限：(15’)

(a)(6’)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^k}), k\in\mathbb{R}$

(b)(9’)$\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k), 0<k<1$

3.(15’)

(a)(10’) 求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

(b)(5’) 求$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\6\\7\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix}$的一个极大线性无关组

4.(10')证明：

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & t^2\beta_{11} & \cdots & t^2\beta_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & t^2\beta_{n1} & \cdots & t^2\beta_{nn} \\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}+t\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+t\beta_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1}+t\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}+t\beta_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11}-t\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}-t\beta_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1}-t\beta_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}-t\beta_{nn} \end{vmatrix}$$

5.(15')$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$是递减正实数列，$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$是严格递增正整数列。设c_n是$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$中不超过n的数的个数，已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{n} > 0$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k_i} = +\infty$

6.(10')已知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$为两个非负实数列且满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$

求证：

$$x \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{y_{n+1-i}}}{n} = 1$$

7.(10')实数域$\mathbb{R}$上的m个n维向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$满足如下条件：

(1)　$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$互不相等

(2)　$\alpha_i\alpha_j = 1, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant m$

(3)　$|\alpha_i| \geqslant 1, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$

求m的最大值

8.(10')设数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$a_1 = 1$且

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n}$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\ln n}}$